

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ - 14.02.2026**

Clasa a XII-a

**Secțiunea H₁ - Filieră tehnologică, toate profilurile și specializările
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

Problema 1 (20 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2y + xy^2 + x + y$, pentru orice x, y numere reale.

a) Arătați că $(-2026) * 2026 = 0$.

b) Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \frac{2}{x} = 9x$.

c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, pentru care $m * n = 1$.

Soluție

a) Pentru $x = -2026$ și $y = 2026$ avem

$$(-2026) * 2026 = 2026^3 - 2026^3 - 2026 + 2026 \quad (6p)$$

$$(-2026) * 2026 = 0. \quad (2p)$$

b) $x * \frac{2}{x} = 3x + \frac{6}{x}, x \neq 0 \quad (2p)$

$$x * \frac{2}{x} = 9x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x, x \neq 0 \quad (2p)$$

$$x = \pm 1. \quad (2p)$$

c) $m * n = 1 \Leftrightarrow (mn + 1)(m + n) = 1 \quad (3p)$

$$m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m, n) \in \{(0, 1), (1, 0)\}. \quad (3p)$$

Problema 2 (20 de puncte)

Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$ și $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

a) Calculați $\int [f(x) - g(x)] dx$.

b) Calculați $\int x e^{\frac{1}{g(x)} - 1} dx$.

c) Folosind, eventual, că $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$, determinați primitiva $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f care verifică relația $F(e) = \ln(e + 1)$.

Soluție

a) $f(x) - g(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0, +\infty) \quad (4p)$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C. \quad (4p)$$

b) $\frac{1}{g(x)} - 1 = x \quad (2p)$

$$\int x e^{\frac{1}{g(x)} - 1} dx = \int x e^x dx = e^x(x - 1) + C. \quad (6p)$$

c) $F(x) = \ln x + \ln(x + 1) + c \quad (2p)$

$$F(e) = \ln(e + 1) \Rightarrow c = -1 \quad (1p)$$

$$\text{Primitiva căutată este } F(x) = \ln x + \ln(x + 1) - 1. \quad (1p)$$

Problema 3 (20 de puncte)

Se consideră funcțiile $f: [0, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0, 1) \\ \ln x, & x \in [1, e] \end{cases}$.

a) Arătați că funcția f admite primitive pe $[0, e]$.

b) Arătați că $\int_0^e f(x) dx = \frac{3}{2}$.

c) Arătați că $\int_1^x f^{2026}(t) dt + 2026 \int_1^x f^{2025}(t) dt = x f^{2026}(x)$, oricare ar fi $x \geq 1$.

Soluție:

a) f continuă pe $[0, e] - \{1\}$ (2p)

f continuă în $x = 1$ (3p)

f continuă pe $[0, e] \Rightarrow f$ admite primitive pe $[0, e]$. (1p)

b) aplică aditivitatea în raport cu intervalul de integrare (2p)

$$\int_0^e f(x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^e \quad (4p)$$

$$\int_0^e f(x) dx = \frac{3}{2}. \quad (2p)$$

c) alegerea lui $f(x)$ (1p)

$$\int_1^x (\ln t)^{2026} dt = \int_1^x t' (\ln t)^{2026} dt = t (\ln t)^{2026} \Big|_1^x - 2026 \int_1^x t \cdot (\ln t)^{2025} \cdot \frac{1}{t} dt \quad (3p)$$

finalizare. (2p)

Problema 4

Un sistem de securitate folosește un **cod numeric de 6 cifre** $C = \overline{abcdef}$ (pentru sporirea securității codului se consideră $a \neq 0$). Sistemul aplică următoarea regulă de validare a codului: **Codul este valid dacă suma cifrelor de pe poziții pare este congruentă modulo 5 cu suma cifrelor de pe poziții impare.**

($a \equiv b \pmod{5}$) dacă resturile împărțirii lui a și b la 5 sunt egale)

a) Reformulează regula de validare folosind clase de resturi modulo 5.

b) Verifică dacă următoarele coduri sunt valide: 048273, 617843, 905214.

c) Dă exemplu de un cod valid care are primele două cifre egale și un cod invalid care are ultimele trei cifre egale. Justifică alegerea făcută.

Soluție

a) $(b + d + f) \equiv (a + c + f) \pmod{5} \Leftrightarrow (b + \widehat{d} + f) = (a + \widehat{c} + f)$ în \mathbb{Z}_5 . (10p)

b) 048273 cod **invalid** (prima cifră 0) (2p)

617843 cod **valid** $((1 + 8 + 3) \equiv (6 + 7 + 4) \pmod{5})$ (4p)

905214 cod **invalid** $((0 + 2 + 4) \pmod{5} = 1$ și $(9 + 5 + 1) \pmod{5} = 0)$. (4p)

c) 113459 cod **valid** (5p)

376888 cod **invalid**. (5p)